

УДК 551.509.314

Расчет σ -уровней для спектральной модели Гидрометцентра России

В.И. Цветков

*Гидрометеорологический научно-исследовательский центр
Российской Федерации, г. Москва, Россия
tsvetkov@mecom.ru*

Разработан алгоритм выбора σ -уровней, учитывающий расположение корней ортогональных многочленов Чебышева-Лагерра. Это обеспечивает наивысшую алгебраическую точность квадратурных формул численного интегрирования. Это обстоятельство без дополнительных затрат позволяет повысить точность интерполирования по вертикали в численной схеме спектральной модели атмосферы.

Ключевые слова: вертикальная структура, квадратурные формулы, многочлены

The σ -level algorithm for the spectral model of the Hydrometcentre of Russia

V.I. Tsvetkov

*Hydrometeorological Research Center of Russian Federation, Moscow, Russia
tsvetkov@mecom.ru*

An algorithm for selecting the σ -levels based on the roots of Chebyshev- Laguerre orthogonal polynomials is developed. This provides the highest algebraic accuracy of integration quadrature formulas. This fact allows increasing the accuracy of vertical interpolation of variables in the numerical scheme of the spectral atmosphere model without additional costs.

Keywords: vertical structure, quadrature formulas, polynomials

Постановка задачи

В спектральной модели толщина атмосферы $0 \leq \sigma \leq 1$ разбита на $N+1$ слоев, разделенных основными уровнями, число которых равно N . Прогностические переменные – вихрь, дивергенция, температура – предписаны к этим основным уровням, в то время как вертикальная скорость – к промежуточным уровням, которые находятся внутри верхних N слоев и на нижней границе нижнего $N+1$ слоя (вычислительная сетка Лоренца).

Для расчета σ -уровней используем ортогональные на полупрямой $[0, \infty)$ многочлены Чебышева – Лагерра [4–5]:

$$L_k(x, \alpha) = \sum_{m=1}^k \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \frac{(-x)^m}{m!(k-m)!}. \quad (1)$$

Здесь k – порядок многочлена; Γ – гамма-функция; α – параметр многочленов.

Для задания σ -уровней, рассмотрим многочлен Чебышева – Лагерра порядка $2N+1$. Известно, что в области определения этот многочлен имеет $2N+1$ различных действительных корней x_n ($n = 1, \dots, 2N+1$).

Так как $\ln \sigma \in [0, \infty)$, то значения σ -уровней ($k = 1, \dots, N$) можно определить с помощью корней x_n , расположенных в порядке убывания, по следующим формулам:

для основных уровней

$$\ln \sigma_k = C \cdot x_{2k}; \quad (2)$$

для промежуточных уровней

$$\ln \sigma_{k-1/2} = C \cdot x_{2k-1}; \quad (3)$$

Из условия, что на самом верхнем ($k = 1$) основном σ -уровне $p_{\min} = 10$ гПа, а на самом нижнем, промежуточном ($k = N+1/2$) σ -уровне $p_{\max} = 1000$ гПа, определим константу C следующим образом:

$$C = \frac{\ln \frac{p_{\min}}{p_{\max}}}{x_2}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\sigma_k = 100^{\frac{x_{2k}}{x_2}}; \quad \sigma_{k-1/2} = 100^{\frac{x_{2k-1}}{x_2}}; \quad \sigma_{N+1/2} = 1. \quad (4)$$

Изменяя при заданном N параметр α многочлена Чебышева – Лагерра можно варьировать положение нижнего основного σ -уровня (σ_N) для того, чтобы подобрать оптимальное для применяемой схемы турбулентности положение первого счетного уровня в приземном слое атмосферы[3].

При изменении параметра α высота нижнего основного уровня меняется незначительно. С высотой толщины слоев равномерно увеличиваются. Поскольку плотность σ -уровней в нижней части атмосферы в предложенном варианте выше, то выше и точность разностных аппроксимаций исходных дифференциальных уравнений по вертикальной координате. Существенным положительным свойством предложенного алгоритма определения σ -уровней является то, что выбор узлов в области определения корней ортогональных многочленов, к которым относятся и многочлены Чебышева – Лагерра, дает наивысшую степень точности интерполяционных квадратурных формул. Это обстоятельство без дополнительных затрат позволяет повысить точность интегрирования переменных по вертикали в численной схеме модели атмосферы.

Численные эксперименты

Ниже приведены рассчитанные значения σ -уровней на основе корней полинома Чебышева – Лагерра (степень полинома $2N+1 = 127$; $\alpha = 1,0$) для модели T169L63:

0.00963, 0.01000, 0.01341, 0.01392, 0.01747,
0.01812, 0.02194, 0.02274, 0.02689, 0.02785,
0.03238, 0.03351, 0.03843, 0.03975, 0.04509,
0.04660, 0.05238, 0.05411, 0.06033, 0.06229,
0.06897, 0.07117, 0.07833, 0.08077, 0.08841,
0.09113, 0.09925, 0.10224, 0.11085, 0.11413,
0.12324, 0.12681, 0.13641, 0.14029, 0.15037,
0.15457, 0.16513, 0.16965, 0.18068, 0.18554,
0.19702, 0.20221, 0.21415, 0.21967, 0.23203,
0.23789, 0.25067, 0.25686, 0.27003, 0.27655,
0.29009, 0.29694, 0.31082, 0.31799, 0.33218,
0.33967, 0.35414, 0.36193, 0.37665, 0.38473,
0.39967, 0.40802, 0.42314, 0.43175, 0.44701,
0.45586, 0.47121, 0.48028, 0.49570, 0.50496,
0.52040, 0.52983, 0.54524, 0.55481, 0.57016,
0.57984, 0.59507, 0.60484, 0.61992, 0.62973,
0.64460, 0.65443, 0.66906, 0.67888, 0.69321,
0.70297, 0.71698, 0.72664, 0.74027, 0.74980,
0.76301, 0.77238, 0.78513, 0.79428, 0.80654,
0.81545, 0.82718, 0.83579, 0.84695, 0.85524,
0.86580, 0.87372, 0.88365, 0.89116, 0.90043,
0.90750, 0.91609, 0.92268, 0.93056, 0.93664,
0.94379, 0.94932, 0.95572, 0.96067, 0.96632,
0.97066, 0.97554, 0.97923, 0.98334, 0.98637,
0.98970, 0.99203, 0.99458, 0.99620, 0.99798,
0.99887, 1.00000.

По разработанному алгоритму была определена сетка вертикальных уровней для спектральной модели.

Проведен численный эксперимент на различных начальных данных. Были рассчитаны среднеквадратические ошибки (RMS) приземной температуры T99 за 5 суток (01.01.2009, 01.04.2009, 01.07.2009, 01.10.2009 в каждом из сезонов) моделями T169L31 и T169L63.

На рис. 1–4 приведены среднеквадратические оценки приземной температуры, рассчитанной моделями T169L31 и T169L63 по Северному полушарию.

Анализ рис. 1–4 показывает, что среднеквадратические ошибки RMS приземной температуры, рассчитанные по результатам работы модели T169L31, больше ошибок, рассчитанных по результатам работы модели T169L63 в расчетные дни зимы, весны и лета, в расчетный день осени – практически одинаковы.

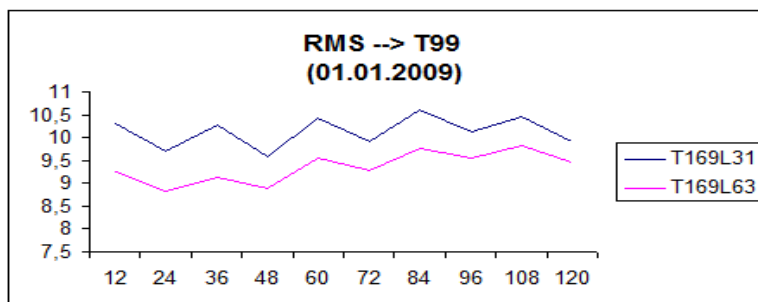


Рис. 1. Сравнение среднеквадратических оценок приземной температуры при идентичных при расчетах по моделям T169L31 и T339L31 для зимы.

Fig. 1. Comparison of standard estimates of surface temperature at identical calculations on models T169L31 and T339L31 for winter.

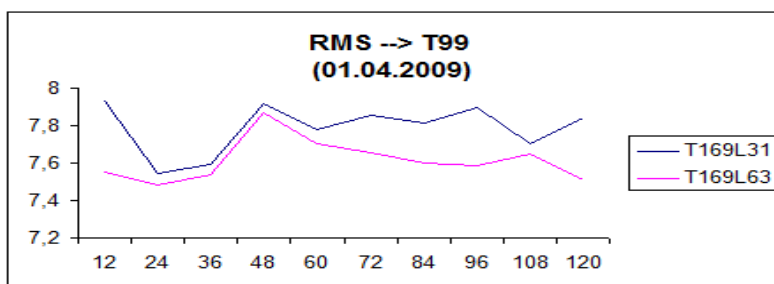


Рис. 2. Сравнение среднеквадратических оценок приземной температуры при идентичных расчетах по моделям T169L31 и T339L31 для весны.

Fig. 2. Comparison of standard estimates of surface temperature at identical calculationson models T169L31 and T339L31 for spring.

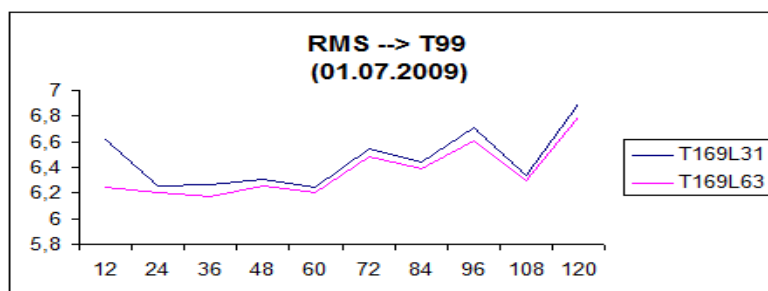


Рис. 3. Сравнение среднеквадратических оценок приземной температуры при идентичных расчетах по моделям T169L31 и T339L31 для лета.

Fig. 3. Comparison of mean square estimates of surface temperature at identical calculations by models T169L31 and T339L31 for summer.

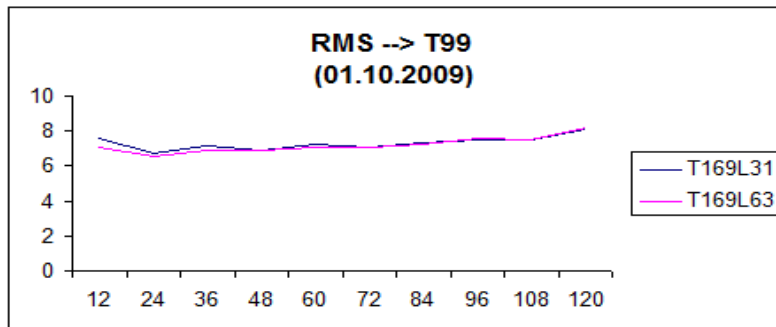


Рис. 4. Сравнение среднеквадратических оценок приземной температуры при идентичных расчетах по моделям T169L31 и T339L31 для осени.

Fig. 4. Comparison of mean square estimates of surface temperature at identical calculations by models T169L31 and T339L31 for autumn.

Отметим, что значение нижнего уровня находится на существенно более низкой высоте по сравнению с предыдущим вариантом (контрольным экспериментом T169L31). Этот факт привел к тому, что моделируемая приземная температура лучше стала соответствовать данным измерений, а также уменьшилось несоответствие на ранних стадиях прогноза. Однако, по-видимому, схемы параметризации пограничного слоя атмосферы имеют «настройки» на другое значение нижнего слоя, поэтому поступление тепла в атмосферу оказалось менее реалистичным. Эти эффекты требуют дальнейшего изучения.

Время, затраченное на расчет моделей T169L31 и T169L63 на ЭВМ SGI128 при интегрировании на 10 суток для четырех сезонов, указанных на рис. 1–4:

Модель T169L31 – 0 ч 35 мин 8 с;

Модель T169L63 – 0 ч 40 мин 11 с.

Таким образом, время работы ЭВМ SGI128, затраченное на получение прогноза по модели T169L63 на 5 мин больше времени, затраченного на выработку прогноза по модели T169L31. Можно сделать вывод, что модель T169L63 существенно не увеличит затрат машинного времени.

Список литературы

1. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 128 с.
2. Суэтин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
3. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы: пер. с англ. М.; Ижевск, 2002. 260 с.
4. Фролов А.В., Цветков В.И. О гармоническом анализе действительных функций на сфере // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 11. С. 1964-1971.
5. Фролов А.В., Цветков В.И. О равномерном приближении геофизических полей на сфере тригонометрическими многочленами // Доклады Академии наук. 2006. Т. 408, № 4. С. 543-546.

References

1. *Sege G.* Ortogonal'nye mnogochleny. Moscow, Fizmatgiz publ., 1962, 128 p. [in Russ.].
2. *Suetin P.K.* Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny. Moscow, Nauka publ., 1976, 327 p. [in Russ.].
3. *Jackson D.* Fourier Series and Orthogonal Polynomials. Moscow; Izhevsk, 2002, 260 p.
4. *Frolov A.V., Tsvetkov V.I.* On the harmonic analysis of functions of a real variable on a sphere. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no.11, pp. 1867–1874.
5. *Frolov A.V., Tsvetkov V.I.* Uniform approximation of geophysical fields on a sphere by trigonometric polynomials. *Doklady Earth Sciences*, 2006, vol. 408, no. 4, pp. 682-685.

Поступила в редакцию 16.04.2019 г.

Received by the editor 16.04.2019.