



Негидростатическая модель локального прогноза погоды Гидрометцентра России

Д.Я. Прессман, Е.М. Пекелис, В.З. Кисельникова

Гидрометцентр России

Введение

В статье кратко описаны три наиболее современных блока негидростатической модели Гидрометцентра России, включенной в оперативную технологию прогноза погоды для Московского и Санкт-Петербургского регионов. Площадь каждого из этих прогнозов близка к площади квадрата 300×300 км. Начальные данные (поля нижеперечисленных прогностических величин) строятся с использованием данных объективного анализа Гидрометцентра России, а краевые условия, нужные в ходе всего прогноза на 48 часов, — с использованием результатов прогноза зарубежных моделей США и Великобритании.

В оперативном варианте модели параметризация турбулентных процессов крайне упрощена. Современная версия этой параметризации (нестационарное дифференциальное уравнение для кинетической энергии турбулентности и алгебраическое соотношение для скорости ее диссипации) в оперативную модель не включена и поэтому не будет описана. Аналогична ситуация с устаревшим радиационным блоком, использующим методику интегральных функций пропускания. Разработанный нами к настоящему моменту уточненный алгоритм расчета радиационных потоков вычислительно дорог и поэтому пока оперативно не используется. По существу, этот уточненный алгоритм — вариант метода дискретных ординат, основанный на результатах работы В.А. Амбарцумяна [1] о распространении однородного потока излучения в отражающей и поглощающей среде, с отдельным описанием заданного числа полос ИК-излучения.

Также не будет рассмотрен сложный и до конца не решенный для системы уравнений локального прогноза вопрос постановки краевых условий, пропускающих выходящие из области прогноза метеорологические образования без их отражения.

Таким образом, в дальнейшем кратко будут описаны алгоритмы расчета: а) поля давления; б) адвекции примеси и количества движения; в) полей водности и температуры почвы.





Система уравнений локального прогноза

В системе координат, связанной с вращающейся Землей, в атмосферной части модели численно решается система уравнений глубокой конвекции, состоящая из:

1) уравнений Эйлера (в векторной записи), линеаризованных относительно термодинамических переменных,

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + c_p \Theta_{vl} \text{grad}(\pi') + 2\bar{\rho}[\vec{\omega} x \vec{V}] + \bar{\rho} g \vec{k} \left(\frac{\Theta'_{vl}}{\Theta_{vl}} + Q_{cw} + Q_{ci} + Q_{rw} + Q_{ri} - 0.61 Q'_v \right) = \vec{D}_V \quad (1)$$

2) уравнения неразрывности, содержащего зависящую только от вертикальной координаты плотность,

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{V}) = 0 \quad (2)$$

3) уравнения притока тепла:

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\Theta}{\rho c_p T} \varepsilon + M_\theta + \frac{1}{\rho} D_\theta \quad (3)$$

4) уравнения эволюции влажностных субстанций в атмосфере:

$$\frac{d\Phi}{dt} = M_\phi + \frac{1}{\rho} D_\phi, \quad \Phi = Q_v, Q_{cw}, Q_{ci}, Q_{rw}, Q_{ri} \quad (4)$$

5) уравнения состояния воздушной смеси:

$$\rho \text{ (кг/м}^3\text{)} = (10^5 \text{ Па}) \cdot (T/\Theta)^{1/(\kappa-1)} / (R_d \Theta_{vl}). \quad (5)$$

В (1) и (5) входит обозначение для виртуальной потенциальной температуры с учетом жидкой и твердой фаз воды, Θ_{vl} :

$$\Theta_{vl} = \Theta(1 + 0.61 Q_v - Q_c - Q_r), \quad Q_c = Q_{cw} + Q_{ci}, \quad Q_r = Q_{rw} + Q_{ri}. \quad (6)$$

Уравнения (1)—(4) с учетом определения потенциальной температуры $\Theta = T/\pi$, уравнения состояния (5) и обозначений (6) образуют систему десяти скалярных уравнений относительно десяти искомым скалярных функций: трех компонентов скорости $\vec{V} = \{u, v, w\}$, потенциальной температуры, функции Экснера

$\pi = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ (P — давление, $P_0 = 100\,000$ Па — стандартное давление на уровне моря, $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ — отношение теплоемкостей воздуха





при постоянном давлении и постоянном объеме) и пяти компонентов атмосферной влаги — массовых долей водяного пара (Q_v), облачной (Q_c) и осаждающейся (Q_r) воды в жидкой (Q_{cw} и Q_{rw}) и ледяной (Q_{ci} и Q_{ri}) фазах каждая. Предполагается, что любое иско- мое поле Φ представляет собой результат уже осуществленного рейнольдсова осреднения исходного поля ($\bar{\Phi} + \phi$).

В приведенной системе уравнений слагаемые, обозначенные через M_ϕ и D_ϕ , соответствуют источникам и стокам субстанции ϕ ($\phi = \rho, \Theta, Q_v, Q_{cw}, Q_{ci}, Q_{rw}, Q_{ri}$) за счет влажностных (M_ϕ) и турбулентных (D_ϕ) процессов соответственно. В (1) через \vec{D}_v обозначен вектор, параметри- зующий влияние турбулентных потоков импульса. Первое слагаемое в правой части уравнения (3) отвечает радиационному потоку тепла.

Как всегда, параметрическое описание упомянутых процессов связано с тем, что вследствие своей высокой пространственно-вре- менной изменчивости они не описываются непосредственно на при- емлемой для прогностических расчетов сетке.

Указанная система уравнений записывается в декартовой системе координат на плоскости проекции, касающейся сферической повер- хности Земли в центре области прогноза. Поверхность Земли про- ектируется на эту плоскость пучком лучей, параллельных радиусу, приходящему в точку касания.

Приведем формулы соответствия точек локального прогноза на плоскости проекции точкам на поверхности сферической Земли и основные параметры сетки.

Пусть центр области прогноза имеет географические коорди- наты (φ_o, ψ_o, R) . В точке касания расположен центр используемой декартовой системы координат (x, y, z) , Ось \vec{z} направлена вдоль ра- диуса Земли R_o , проведенного в точку касания плоскости проек- ции, ось \vec{x} направлена на Восток и касается круга широты φ_o , ось \vec{y} направлена на Север и касается меридиана ψ_o . Проектирование земной поверхности на плоскость проекции осуществляется пуч- ком лучей, параллельных радиусу R_o . Поэтому $x = R \cos(\varphi) \sin(\psi - \psi_o)$, $y = R(\sin \varphi \cos \psi_o - \sin \varphi_o \cos \psi \cos(\psi - \psi_o))$. Если ввести $a = R \cos(\varphi_o)$, $b = R \sin(\varphi_o)$, $d = x^2 / R^2$, то можно найти обратные функции в виде

$$\sin(\varphi) = \frac{a \cdot y + \sqrt{a^2 y^2 - R^2 (y^2 - b^2 (1 - d))}}{R^2}, \quad \cos(\psi - \psi_o) = \sqrt{1 - \frac{d}{\cos^2(\varphi)}}.$$

Отсюда $\varphi = \arcsin(\sin(\varphi))$ и $\psi = \psi_o - \arccos(\cos(\psi - \psi_o)) \cdot \text{sign}(x)$. Это величины широты и долготы точки, проектируемой в точку





с координатами (x, y) , в радианах. Принятая в модели сетка точек содержит точку касания в центре центрального квадрата, число точек сетки четное по x и по y и равно $N=30$.

Пусть точки сетки упорядочены проходами слева направо (первый индекс $i=1, \dots, N$) и сверху вниз (второй индекс $j=1, \dots, N$). Тогда для точки с индексами (i, j) при шаге сетки, равном ΔX км, координатами в км будут: по оси X — $X = (-(N-1)/2 * \Delta X + (i-1) * \Delta X)$, по оси Y — $Y = ((N-1)/2 * \Delta X - (j-1) * \Delta X)$.

Шаг сетки равномерный по X и по Y и равен $\Delta X = 10$ км. Квадрату на плоскости проекции отвечает криволинейная трапеция на поверхности Земли. Шаг сетки по вертикали меняется от нескольких метров у поверхности до 1 км вблизи верхней границы, расположенной на высоте 10,5 км. Число уровней 15. Число почвенных уровней равно 5. Один внеатмосферный слой вводится дополнительно для описания снежного покрова. Шаг по времени равен 4 минутам.

Расчет поля давления

Определение поля давления — важный этап любой численной методики прогноза погоды. Записанная в прямоугольной Z -системе координат система уравнений глубокой конвекции, когда плотность в уравнении неразрывности считается функцией только вертикальной координаты, с линеаризованными по термодинамическим переменным уравнениями движения допускает решение стационарного уравнения для давления методом разделения переменных. По этой причине соответствующий конечно-разностный аналог этого уравнения может быть решен эффективным прямым методом [2]. Суть этого метода состоит в последовательном переходе к задачам меньшей размерности, для чего необходимо одноразово для данного расчета прогноза определить собственные вектора и собственные значения соответствующих одномерных задач. Вышеупомянутая линеаризация производится с помощью фоновых (зависящих только от вертикальной координаты Z) величин, полученных осреднением по горизонтальным координатам (а если возможно, то и по времени, например, когда для рассматриваемой области известен крупномасштабный прогноз) полей давления, влажности и потенциальной температуры.

В случае неоднородного рельефа горизонтальные координатные (x, y) плоскости этим рельефом пересекаются, так что какие-то области этих плоскостей попадают под рельеф. Определяемое прямым





методом давление и соответствующие ему составляющие вектора скорости становятся известными и в «фиктивных» точках разностной сетки, принадлежащих указанным областям. Так получаемые значения составляющих скорости оказываются отличными от нуля в указанных фиктивных точках, хотя в начальный момент они там нулевые. Оказывается, что в этом случае возможен итерационный процесс решения уравнения для давления, (на каждой итерации ранее определенные фиктивные скорости заменяются нулями и таковыми входят в формулы расчета правых частей уравнения для давления), который быстро сходится при любой крутизне рельефа. Сходимость понимается в том смысле, что давление устанавливается таким, что определяемая с его помощью скорость в фиктивных точках близка к нулю.

В результате получается решение задачи в декартовой системе координат при неоднородном рельефе без перехода к спрямляющей рельеф системе координат.

В неоперативной версии модели указанный переход сделан, вследствие чего в некоторых уравнениях системы возникают дополнительные слагаемые, затрудняющие приемлемое решение разностного уравнения для давления: неизбежны итерации, скорость сходимости которых зависит от крутизны рельефа.

Трудности (если оставаться в декартовой системе координат) возникают при необходимости: 1) хорошо аппроксимировать возможно сильно меняющиеся при приближении к поверхности профили прогностических величин; 2) учесть специфику слоя постоянных потоков. Именно из-за этой необходимости сетка точек в рассматриваемой модели выбирается неравномерной по высоте с тем, чтобы у поверхности точки сгущались. При неоднородном рельефе в прямоугольной Z-системе координат это сгущение может просто оказаться под рельефом. На это обстоятельство можно не обращать внимания, если сетка точек имеет высокое разрешение всюду в области, ограниченной сеточной горизонтальной плоскостью, расположенной над самой высокой точкой рельефа. Но в этом случае появляются излишние вычислительные затраты, так как при этом: 1) сеточное разрешение возрастает и там, где профили достаточно гладкие и, значит, в этом возрастании нет нужды; 2) значения скорости и давления находятся в возможно многочисленных фиктивных точках.

Заменим реальный рельеф поверхностью, составленной из вертикальных и горизонтальных прямоугольников с вершинами в точках расчетной сетки. Будем называть эту поверхность сеточным





рельефом и считать, что под ней находится воздух, неподвижный во все моменты времени. Сама же расчетная область не связывается с рельефом, ее нижняя граница — координатная (x, y) плоскость, проходящая через минимальную z -координату рельефа. Искомое давление, определяемое как вне, так и внутри сеточного рельефа, должно обеспечивать указанную неподвижность.

Последовательность предлагаемых итераций на каждом временном шаге (переход от момента t к моменту $t + \Delta t$) можно представить следующим образом. Первая итерация определяет предварительные значения u^1, v^1, w^1 , составляющих вектора скорости из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} u^1 = u^0 - \Delta t \cdot (c_p \cdot \bar{\theta}_v \cdot \partial \pi_1^1 / \partial x + F_{u^0}) \\ v^1 = v^0 - \Delta t \cdot (c_p \cdot \bar{\theta}_v \cdot \partial \pi_1^1 / \partial y + F_{v^0}) \\ w^1 = w^0 - \Delta t \cdot (c_p \cdot \bar{\theta}_v \cdot \partial \pi_1^1 / \partial z + F_{w^0}) \end{cases} \quad (7)$$

где

$F_{u^0}, F_{v^0}, F_{w^0}$ — определяемые по данным в начале временного шага и по краевым условиям слагаемые, содержащие адвекцию, силу Кориолиса, турбулентные слагаемые, силу плавучести и т.п.;

c_p — теплоемкость атмосферного воздуха при постоянном давлении;

$\bar{\theta}_v(z)$ — вертикальное распределение фоновой виртуальной температуры;

$\pi(x, y, z, t)$ — отклонение функции Экснера от ее фоновой величины $\bar{\pi}(z)$;

$\pi_1^1(x, y, z, t)$ — величина указанного отклонения после первой итерации.

Отклонение функции Экснера от ее фона будем искать, решая уравнение, получаемое подстановкой u^1, v^1, w^1 в уравнение неразрывности, имеющее в системе уравнений глубокой конвекции вид ($\bar{\rho}(z)$ — фоновый профиль плотности воздуха):

$$\partial(\bar{\rho}u) / \partial x + \partial(\bar{\rho}v) / \partial y + \partial(\bar{\rho}w) / \partial z = 0. \quad (8)$$

Для решения полученного таким образом (для отклонения функции Экснера от ее фона) эллиптического уравнения второго порядка в частных производных подходит метод разделения переменных, поскольку коэффициенты при производных зависят только от заданных функций от вертикальной координаты.





Краевые условия для этого уравнения получаются с помощью значений (в момент $t + \Delta t$) нормальных к границе составляющих скорости, взятых или из фонового прогноза или найденных с помощью условий типа «открытых границ». Прежде всего, специальная процедура модифицирует эти скорости, чтобы рассматриваемая далее задача типа Неймана (на границах задается комбинация нормальной производной от «давления» и первых и вторых производных по двум касательным к границам направлениям) была разрешима. Краевые условия возникают из аппроксимации уравнения неразрывности в «граничной» точке, повторяющей переход к уравнению для функции Экснера во внутренних точках, за исключением аппроксимации производной по нормали к границе, где используется уже известная модифицированная нормальная составляющая скорости.

Фактически решается уравнение несколько отличное от приведенного, так как из-за описания гравитационных волн неявной (на этапе предиктора) или полунеявной (на этапе корректора) разностной схемой:

1) коэффициент при $\partial \pi / \partial z$ в третьем уравнении движения заметно сложнее (но он по-прежнему — фиксированная для данного прогноза функция от вертикальной координаты),

2) в правую часть входит комбинация правых частей уравнений притока тепла, эволюции влажности и водности облаков.

Разностный аналог этого уравнения решается прямым методом, основанным на последовательном уменьшении размерности задачи при разложении решения по собственным векторам возникающих при разделении переменных одномерных разностных операторов при соответствующих краевых условиях. Задача сначала сводится к определению коэффициентов разложения решения по зависящим только от координаты Z собственным векторам Z -оператора. Эти коэффициенты разложения зависят от горизонтальных координат и, в свою очередь, раскладываются в ряд по собственным векторам X -оператора. Получившиеся, наконец, одномерные задачи для определения коэффициентов разложения по собственным функциям Y -оператора эффективно решаются прогонкой. Решение уравнений этого последнего этапа определено с точностью до произвольной постоянной, которая заменяется нулем. Линейные комбинации собственных векторов с найденными коэффициентами дают решение с машинной точностью. Отметим, что определение собственных векторов и собственных значений следует проводить с удвоенной точностью. Необходимые при таком способе решения матрицы собственных векторов и обратные к ним матрицы достаточно вычислить один раз перед началом работы основной программы.





Подстановка полученного отклонения функции Экснера в систему (7) определяет первую прикидку составляющих вектора скорости, которая не обязана быть нулем внутри сеточного рельефа. Следующие итерации делаются однообразно и должны привести к функции Экснера, обеспечивающей равенство нулю вектора скорости внутри сеточного рельефа. Каждый раз методом конечных разностей решается следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^i = u^{i-1} - \Delta t \cdot c_p \cdot \bar{\theta}_v \cdot \partial \pi_i' / \partial x \\ v^i = v^{i-1} - \Delta t \cdot c_p \cdot \bar{\theta}_v \cdot \partial \pi_i' / \partial y \\ w^i = w^{i-1} - \Delta t \cdot c_p \cdot \bar{\theta}_v \cdot \partial \pi_i' / \partial z \\ \partial(\bar{\rho}u^i) / \partial x + \partial(\bar{\rho}v^i) / \partial y + \partial(\bar{\rho}w^i) / \partial z = 0 \end{array} \right. \quad i = 2, 3, \dots, N$$

где значения $u^{i-1}, v^{i-1}, w^{i-1}$ вне сеточного рельефа получены на предыдущей итерации, а внутри него — заменены нулями; N — число итераций, определяемое условием сходимости. Итерации считаются сходящимися, если получаемые внутри сеточного рельефа скорости стремятся к 0. Отметим, что каждая итерация дает очередную поправку к предыдущему значению отклонения от фона функции Экснера. В конце концов, это отклонение находится суммированием: $\pi = \sum_i \pi_i'$. Рассчитываемые на каждой итерации скорости всюду удовлетворяют разностному аналогу уравнения неразрывности, а после их коррекции (обнуления) внутри сеточного рельефа — отдельно вне его и внутри него, и после каждой итерации могут использоваться как начальные для следующего шага по времени.

Возможности описанного алгоритма проверялись путем его включения в схему локального прогноза для территории Московского региона. Кроме теста с включением в схему высот реального рельефа, рассматривался и другой, когда в качестве рельефа внутри круга радиусом 7 горизонтальных шагов сетки ($\Delta x = \Delta y = 10$ км) вводилась сильно изрезанная гора высотой более 5 км, так что в некоторых местах вертикальный прямоугольник сеточного рельефа имеет такую же высоту. Высота H этого рельефа в метрах определялась по формуле:

$$H = 5520 \cdot \cos(R / 14 \cdot \pi) \cdot |\sin(2\psi)|,$$

в полярной системе координат (R, ψ) с центром в центральной точке расчетной области. Радиус в этой формуле измеряется в шагах сетки. В точках, где $R \geq 7$, высота рельефа считалась равной нулю.





Различие между поведением невязки в этих тестах состояло в том, что на первых нескольких шагах по времени во втором тесте требовалось несколько большее число итераций (порядка 20 вместо 10) для уменьшения модуля скорости внутри сеточного рельефа от полутора десятков метров до пороговой величины в 2 мм, после чего итерации прекращались. После первого десятка шагов по времени поведение модуля скорости внутри сеточного рельефа почти не меняется: он уменьшается от величины порядка нескольких сантиметров до вышеуказанного порогового значения менее чем за 10 итераций. Ниже приведены рисунки изогипс давления и векторов горизонтальной составляющей скорости ветра для второго и первого тестов при реальных начальных данных и краевых условиях (исходный срок — 00 часов 31 января 2003 года).

Пустоты на рисунках вектора горизонтальной составляющей скорости совпадают с точками, попавшими внутрь сеточного рельефа, заменяющего реальный или модельный рельеф на четвертом Z-уровне.

Можно сказать, что:

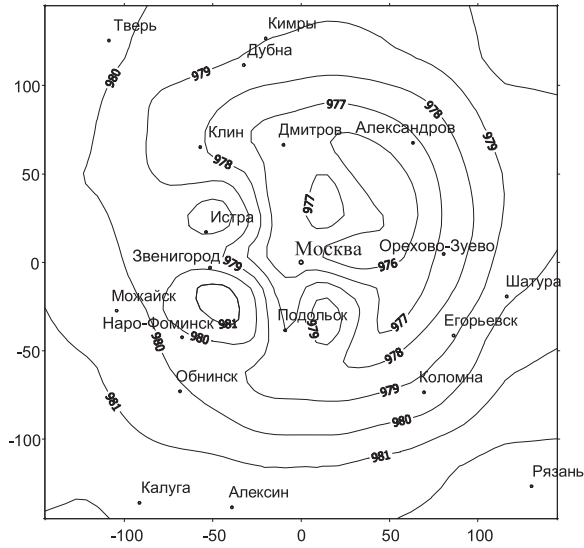
1) описанный алгоритм достаточно эффективен. В случае плоского рельефа расчет содержит только первую из описанных выше итерацию. Время расчета прогноза из-за производства последующих итераций для модели локального прогноза на сетке (30x30x15) в атмосферной области счета увеличивается не более чем в 1,4 раза при учете рельефа с весьма обрывистыми склонами (высота некоторых прямоугольников модельного сеточного рельефа более 5 км при длине основания 10 км), если итерации прекращаются при уменьшении максимума модуля скорости внутри рельефа до двух миллиметров (достаточное для этого число итераций не превышает 10);

2) скорость сходимости алгоритма после первого десятка шагов по времени мало меняется и незначительно зависит от крутизны склонов;

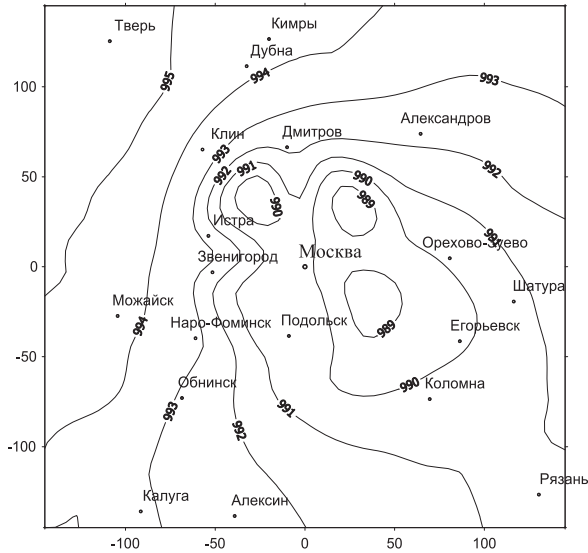
3) итерации в случае решения системы уравнений глубокой конвекции можно оборвать в любой момент, так как после каждой итерации полученные составляющие скорости удовлетворяют уравнению неразрывности.

Остановимся теперь на аппроксимации уравнения переноса (адвекции) пассивной примеси со скоростью движущейся среды и уравнений квазилинейной задачи переноса импульса.





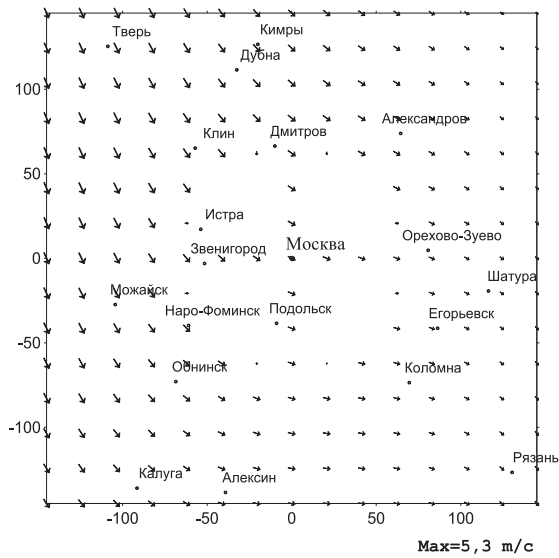
а)



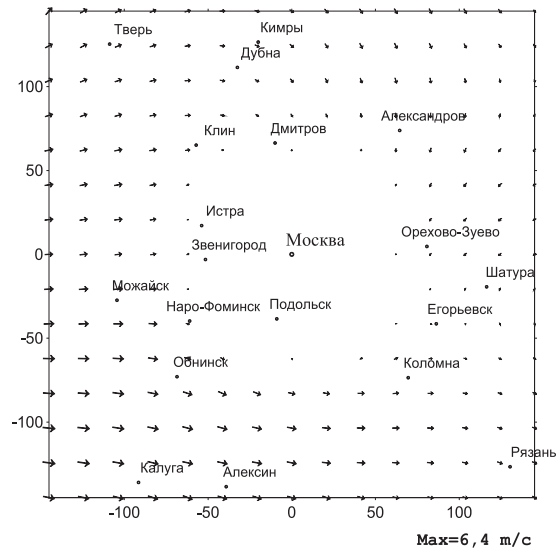
б)

Рис. 1. Давление вне и внутри модельного рельефа на нижнем расчетном уровне: а) в начале расчета; б) прогноз на 36 часов.





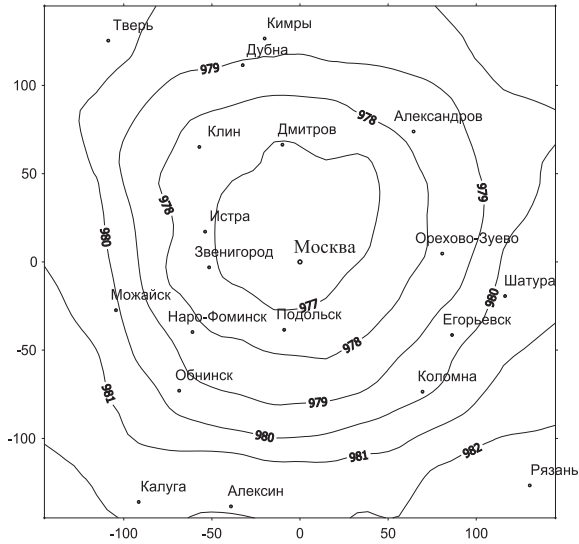
а)



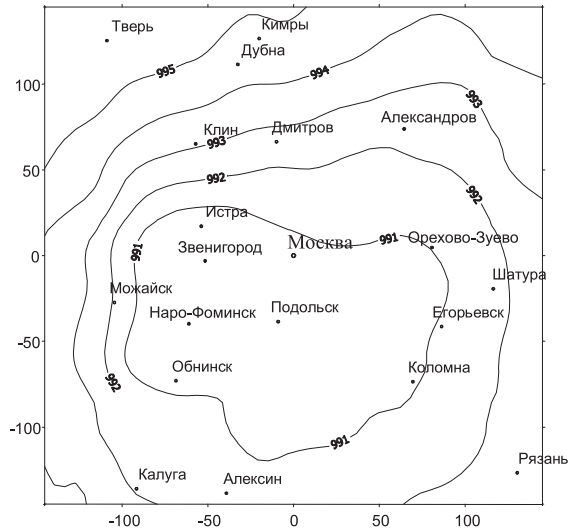
б)

Рис. 2. Горизонтальная составляющая скорости ветра на четвертом Z-уровне (40 м) в случае модельного рельефа: а) в начале прогноза; б) прогноз на 36 часов.





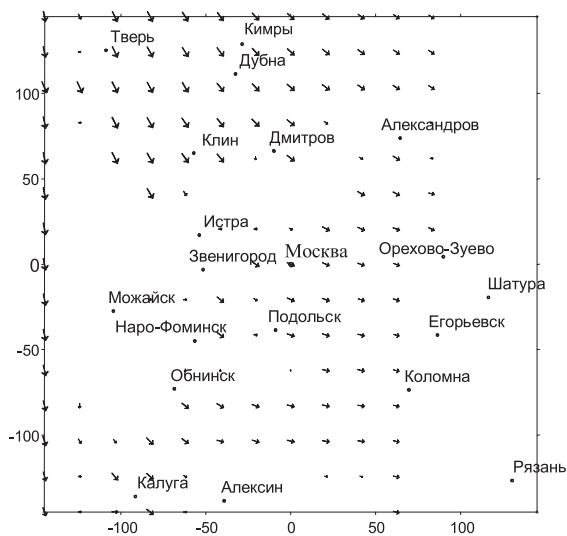
а)



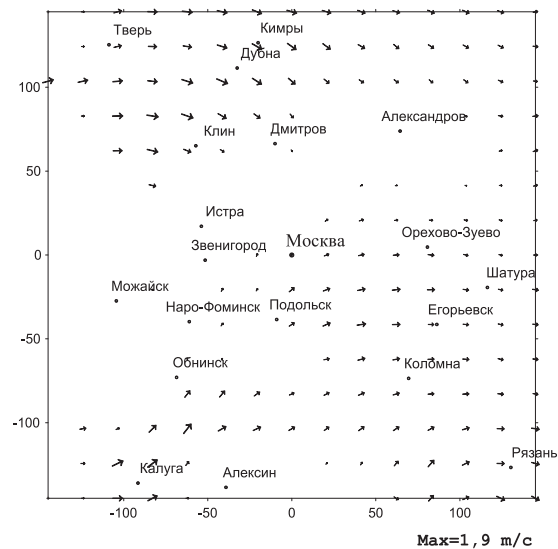
б)

Рис. 3. Давление вне и внутри реального рельефа на нижнем расчетном уровне: а) в начале расчета; б) прогноз на 36 часов.





а)



б)

Рис. 4. Горизонтальная составляющая скорости ветра на четвертом Z-уровне (40 м над минимальной высотой рельефа в области прогноза) в случае реального рельефа: а) в начале прогноза; б) прогноз на 36 часов.





Аппроксимация уравнений адвекции

Здесь рассматриваются только одномерные задачи переноса, так как для многомерного переноса мы считаем возможным применение метода координатного расщепления.

Будут решаться методом конечных разностей уравнения:

$$\partial f / \partial t + a \cdot \partial f / \partial x = 0 \quad (9)$$

$$\partial u / \partial t + u \cdot \partial u / \partial x = 0, \quad (10)$$

в первом из которых за неизвестную функцию f можно принимать потенциальную температуру, влажность, водность облаков и осадков, составляющую скорости вдоль оси, отличной от оси x ; величина a — известная скорость переноса вдоль оси x . Во втором уравнении скорость переноса неизвестной величины u совпадает с этой величиной, так что вторая задача квазилинейна.

Следующие принципы положены в основу построения полуневяжной разностной схемы. Во-первых, используются только направленные разности при минимальном числе точек, необходимом для полуневяжной аппроксимации оператора переноса. Таким образом, сеточный шаблон содержит 4 точки: две в начале и две в конце временного шага. Их расположение на оси x зависит от направления скорости адвекции.

Во-вторых, базовой для построения требуемой схемы является абсолютно устойчивая схема второго порядка аппроксимации по координате и времени на решениях линейного уравнения (на вышеуказанном шаблоне). Оказывается, такая схема существует, и множителем перехода в ней на всех гармониках Фурье является единица.

Для уравнения (9) эту схему можно записать так:

$$\frac{f_1^{\Delta t} - f_1^0}{\Delta t} + \frac{1+r}{2 \cdot r} a \frac{f_1^0 - f_0^0}{\Delta x} + \frac{r-1}{2 \cdot r} a \frac{f_1^{\Delta t} - f_0^{\Delta t}}{\Delta x} = 0, \quad (11)$$

где величина r — число Куранта, равное $\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x}$.

В-третьих, ставится условие «локальной знакоопределенности», заключающееся в том, что если переносимая субстанция не отрицательна (не положительна) в трех точках шаблона, расположенных против потока и определяющих искомое значение в четвертой точке шаблона, то это искомое значение тоже не отрицательно (не положительно). Это условие для произвольной функции здесь переформу-





лировано так: искомое значение должно находиться между максимумом и минимумом адвектируемой функции в трех точках шаблона, расположенных против потока.

Можно показать, что за счет уменьшения порядка аппроксимации до первого можно изменить базовую схему так, чтобы поставленное условие «знакоопределенности» было выполнено.

Величина a может быть функцией координаты и времени. Будем считать, что в (11) она получена осреднением по этим параметрам в центре каждого сеточного шаблона, выбор которого (направленность шаблона) определяется значениями a в самих точках сетки, где задана адвектируемая функция. Упомянутое уменьшение порядка аппроксимации производится изменением величины числа Куранта r .

Для случая $\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x}$ меньше 1, можно доказать, что существует некое \hat{r} , меньшее 1, подстановка которого в (11) приводит к выполнению условия «знакоопределенности» схемы. Можно каждый раз не заниматься поиском этого нового \hat{r} , а просто при получении искомой функции вне интервала, задаваемого величинами ее минимума и максимума в трех противопотоковых точках шаблона, заменять ее значение на ближайшее из этих величин.

Остаются легко разрешимые проблемы с выбором направленности шаблонов при различных знаках скорости переноса a в соседних точках сетки или при серии подряд идущих нолей этой скорости и с очередностью расчета в ячейках сетки. Прежде всего, происходит расчет в точках сетки, где скорость переноса равна нулю, и в точках сетки, ограничивающих ячейки с расходом субстанции на обеих границах ячейки. Такая ячейка разбивается на две части с общей границей, где скорость переноса равна нулю. На этой границе функция считается неизменной в течение шага, что дает возможность произвести расчет в двух оставшихся граничных точках. Затем определяются значения неизвестной функции в остальных точках сетки на следующем временном уровне.

Если же $\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x}$ оказалось больше 1, то переходим к другой аппроксимации уравнения (9), всегда удовлетворяющей условию «знакоопределенности»:

$$\frac{f_1^{\Delta t} - f_1^0}{\Delta t} + \frac{1}{r} a \frac{f_1^0 - f_0^0}{\Delta x} + \left(1 - \frac{1}{r}\right) a \frac{f_1^{\Delta t} - f_0^{\Delta t}}{\Delta x} = 0. \quad (12)$$





В случае аппроксимации уравнения (10) задача несколько усложняется. Во-первых, схема приобретает вид:

$$\frac{u_1^{\Delta t} - u_1^0}{\Delta t} + \frac{1+r}{4 \cdot r} (u_0^0 + u_1^0) \frac{u_1^0 - u_0^0}{\Delta x} + \frac{r-1}{4 \cdot r} (u_0^{\Delta t} + u_1^{\Delta t}) \frac{u_1^{\Delta t} - u_0^{\Delta t}}{\Delta x} = 0, \quad (13)$$

так что неизвестное теперь является корнем квадратного уравнения.

Величину r здесь будем определять как $\max \left\{ |u_1^0|, |u_0^0| \right\} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Если эта величина меньше единицы, то не сложно доказать, что существует некое \hat{r} , меньшее единицы, подстановка которого в (13) приводит к «знакоопределенности» схемы. Для этого достаточно

взять максимум из трех величин $\hat{r} = \max \left\{ 0.134; r; \frac{(u_0^{\Delta t})^2 - (u_0^0)^2}{(u_0^{\Delta t})^2 + (u_0^0)^2} \right\}$.

Если величина r больше 1, то, как и в линейном случае, переходим к схеме, всегда «знакоопределенной»:

$$\frac{u_1^{\Delta t} - u_1^0}{\Delta t} + \frac{1}{2 \cdot r} (u_0^0 + u_1^0) \frac{u_1^0 - u_0^0}{\Delta x} + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot 0,5 \cdot (u_0^{\Delta t} + u_1^{\Delta t}) \frac{u_1^{\Delta t} - u_0^{\Delta t}}{\Delta x} = 0 \quad (14)$$

Можно заметить, что выводы не слишком сильно изменились при переходе к квазилинейному случаю.

Отметим, что общая схема всей мезомасштабной модели суть схема предиктор-корректор. Делается полушаг по времени (куда входят все операторы линейной адвекции со скоростью переноса в (11) с начала шага), определяющий все функции системы в конце этого полушага, а затем полный шаг по времени, в котором линейный перенос происходит со скоростями, рассчитанными на полушаге. Аппроксимация же квазилинейных операторов на шаге и полушаге отличается только величиной Δt . Так как расположение узлов сетки различно на шаге и полушаге, то приходится делать дополнительное осреднение для получения величин на полушаге в нужных точках.

Кроме того, так как сетки для разных функций в принятой модели различны, то приходится проводить интерполяцию для определения составляющих скорости в точках сетки, где определена адвектируемая функция.

Несколько слов по поводу расчета выпадения осадков. Шаг по времени разностной схемы совершенно не подходит для разностной аппроксимации соответствующего этому процессу дифференциального уравнения в нижних сеточных слоях, где разрешение по верти-





кали для них уменьшается в используемой модели до 2 м. Поэтому здесь применяется чисто Лагранжев подход, когда частицы осадков (раздельно капельные и кристаллические) данного атмосферного слоя с соответствующей им скоростью опускаются в течение шага по времени, сохраняя толщину этого слоя. Затем выделяются части этого опустившегося слоя, попавшие в нижележащие сеточные слои. Соответствующие этим частям массы суммируются и образуют массу осадков данного слоя. Часть исходного для данных осадков слоя, опустившаяся под поверхность входит в сумму накопленных осадков.

Перейдем к используемому в модели алгоритму описания процессов в почве и в возможно находящейся на ней смеси воды и льда.

Алгоритм расчета гидротермических свойств почвы

Выбранная для описания почвенных процессов система уравнений в основном взята из работы [3].

Расчетная область рассматриваемой мезомасштабной модели содержит кроме атмосферной части почвенную часть и дополнительный водный слой в виде лужи или льда или их смеси на поверхности почвы. Растительность представляется пленкой на этом слое или (при его отсутствии) на поверхности почвы. Тип растительности определяет отношение площади пленки к площади сеточной ячейки. Такой «лист» удерживает некоторое, также определяемое типом растительности количество воды, не допускает прямого взаимодействия нижележащей среды с атмосферой и испаряет через свои поры поставляемую корнями воду почвы. Так как наша основная задача — прогноз атмосферных параметров, мы ограничились довольно грубой физической постановкой задачи в этой части модели. Так, структура почвы считается независимой от направленной вверх координаты z и времени t ; решение проблемы стока сводится к введению порога для толщины жидкой смеси; плотность льда ρ_i считается равной плотности воды ρ_w (тем самым исключается возможность разрушения пор почвы при замерзании содержащихся в них воды); используются довольно простые параметризации для коэффициентов решаемых уравнений, так что некоторые реально происходящие процессы просто выпадают из рассмотрения.

Гидротермический режим в указанной части модели определяется численным решением системы двух уравнений в частных производных (зависимость от горизонтальных координат (x, y) параметрическая) для двух функций: а именно для водности W (гипотетическая плотность воды в жидкой и кристаллической фазах при





ее равномерном распределении по всему объему среды, в порах которой она расположена) и для суммы S энтропий компонентов рассматриваемой среды.

Слой почвы, охватываемый моделью, имеет заданную толщину и разбивается сеткой на фиксированные подслои различной толщины, каждый из которых может быть частично (или целиком) мерзлым. Водоем понимается как специфический вид почвы (без скелета и без потоков жидкой фазы воды). Специфика почвенной воды в том, что при отрицательной по Цельсию температуре эта вода не кристаллизуется, если ее количество меньше некоторой, определяемой данным видом почвы и с температурой величины $q_w^m(T)$.

Граница между талой и мерзлой частями среды в дальнейшем называется «фронтом». За каждым фронтом (если его температура $T = T_0 = 273,15\text{K}$) производится слежение при предварительном определении скорости его распространения из явно аппроксимируемых нижеприведенных соотношений. Как и в атмосферной части модели, сетка точек по вертикали фиксирована, а шаг по времени Δt постоянен. На таком фронте функция W считается непрерывной, тогда как энтропия может быть разрывной. В принципе, в любом сеточном интервале может возникнуть фронт, для каждого из которых решается задача, аналогичная задаче Стефана. Перемещаясь, фронты могут уничтожать друг друга.

На фронтах с $T < T_0$ (такие фронты возможны в почве при малой ее увлажненности) энтропия будет непрерывной вместе с жидкой составляющей водности. Такой фронт будет предполагаться неподвижным, а температура в точке фронта — неизменной, если температура и водность на границах слоя, содержащего этот фронт не меняются со временем. Положение такого фронта определено этим допущением (поток энтропии должен быть непрерывным в точке фронта).

Там, где функция S (или производные функций S и W) рвутся, дифференциальные уравнения заменяются соотношениями на скачке. При этом предполагается, что разрыв расположен или в узле сетки, или внутри любого сеточного интервала. Внутри каждого сеточного интервала может находиться не более одного такого разрыва. В соответствии с этим предусмотрено 16 типов слоев, замкнутых относительно разрешенных скоростей перемещений фронтов (т.е. никаких новых типов слоев, кроме этих 16, при разрешенных перемещениях фронтов не образуется). На нижней границе почвы (на глубине 1,2 м) фиксируются (для 48 часового срока прогноза) климатическое значение положительной в шкале Цельсия температуры T





и климатическое значение водности почвы, тогда как на нижней границе атмосферы ставятся условия баланса воды и энтропии на разделе двух сред. Последние условия в случае примыкания атмосферы к почве (но не к смеси) сводятся к непрерывности потоков влажности и энтропии. Используются приведенные ниже обозначения.

Безразмерные q_w и q_i — объемные водность и ледность почвы; $q_w^{\min} \leq q_w \leq q_w^{\max}$; $\rho_w = \rho_i$ — плотности воды и льда $q_w^m(T)$ — таблично задаваемая, монотонно возрастающая зависимость максимального объемного содержания жидкой фазы воды в мерзлой почве от температуры. При температуре $T \leq T_0$ жидкая вода почвы переходит в кристаллическую фазу при температуре $T < T_0$, только если q_w больше $q_w^m(T)$. Величина W обозначает водность почвы (условная плотность конденсата воды во всех фазах при ее гипотетическом, равномерном распределении по объему почвы, часть пор которой она заполняет).

Выполнены следующие уравнения:

$$\partial W / \partial t = \partial \Pi_w / \partial z, \quad (15)$$

$$\text{где } W = \begin{cases} \rho_w & \text{— в смеси и в водоеме} \\ \rho_w \cdot q_w & \text{— в талой почве} \\ \rho_w \cdot q_w^f + W_i & \text{— в мерзлой почве} \end{cases}$$

$$W_i = \rho_w \cdot q_i; \quad q_w^f \leq q_w^m(T);$$

$$\Pi_w = \begin{cases} -\rho_w \cdot w & \text{— в смеси} \\ \rho_w \cdot K \cdot (\partial \psi / \partial z + 1) & \text{— в почве} \end{cases}$$

Здесь w — вертикальная скорость частиц смеси, K — коэффициент гидравлической проводимости, ψ — капиллярно-сорбционный потенциал.

$$K = K^g \cdot \left(\frac{W - W_i}{W^{\max} - W_i} \right) \cdot \left(1 - \varphi \cdot \frac{W_i}{W_i^{\max}} \right)^a;$$

$$\psi = \psi^g \cdot \left(\frac{W^{\max} - W_i}{W - W_i} \right)^b \cdot \left(\frac{W^{\max}}{W^{\max} - W_i} \right)^c.$$

где W_i^{\max} — кристаллическая часть водности почвы при ее максимальном влагосодержании при данной температуре, а коэффициент φ — эмпирический. В некоторых моделях в формулу для коэффициента K вводят дополнительный множитель, переходящий в ноль при





априорно задаваемой отрицательной в шкале Цельсия температуре, для прекращения потоков почвенной воды при температурах ниже этой температуры.

Постоянными для данного типа почвы принимаются величины q_w^{\min} , q_w^{\max} , W^{\max} , W^{\min} (максимальная и минимальная водности), а также величины a , b , c , K^g , ψ^g и зависимость $q_w^m(T)$. Для Московского региона нами используется карта почв с выделением 10 почвенных типов.

Уравнение (15) действительно вне фронтов, а на фронте следует использовать соотношение, которое можно получить из соответствующего интегрального соотношения, связывающего величины W и Π_w через любую поверхность τ :

$$dz_\tau / dt \cdot [W] = -[\Pi_w], \quad (16)$$

где dz_τ / dt — скорость перемещения поверхности относительно среды по вертикали, а квадратные скобки от какой-либо величины — скачок этой величины (например, при переходе через поверхность τ сверху вниз).

Предполагается непрерывность W при переходе через фронт в смеси и в почве. Тогда из (16) следует непрерывность Π_w на фронте, что в смеси сводится к непрерывности на фронте скоростей жидкой воды и льда в предположении о равенстве их плотностей. Если τ — верхняя граница почвы, то $dz_\tau / dt = 0$ и, хотя здесь $[W]$ не ноль, выполнено $[\Pi_w] = 0$. На границе смеси с атмосферой dz_τ / dt может отличаться от 0.

Первое начало термодинамики запишем как уравнение энтропии, т.е. в среде без фронтов предполагается выполнение

$$\partial S / \partial t = \partial \Pi_s / \partial z, \quad (17)$$

где энтропия и ее поток задаются выражениями:

$$S = \begin{cases} \rho_w \cdot s_w \\ \rho_w \cdot s_l \\ \rho_g \cdot s_g + \rho_w \cdot q_w \cdot s_w + \rho_l \cdot q_l \cdot s_l \end{cases}, \quad \Pi_s = \begin{cases} \frac{\lambda_w}{c_w} \cdot \frac{\partial s_w}{\partial z} - \rho_w \cdot w \cdot s_w \\ \frac{\lambda_l}{c_l} \cdot \frac{\partial s_l}{\partial z} - \rho_l \cdot w \cdot s_l \\ \frac{\lambda_g}{c_g} \cdot \frac{\partial s_g}{\partial z} + \Pi_w \cdot s_w \end{cases}$$





Первые две строчки формул определяют энтропию и ее поток для смеси (водоема) соответственно при положительных и отрицательных по Цельсию температурах, третья строчка — для энтропии и ее потока для почвы. При этом удельные энтропии почвы воды и льда определяем как:

$$s_g = c_g \cdot \ln(T / T_o); s_w = c_w \cdot \ln(T / T_o) + L_{IW} / T_o; s_l = c_l \cdot \ln(T / T_o).$$

Здесь L_{IW} удельная теплота плавления льда при $T = T_o = 273,15K$, w — скорость движения смеси; c_g, c_w, c_l — принимаемые постоянными удельные теплоемкости почвы, воды и льда, λ_w и λ_l — также принимаемые постоянными коэффициенты теплопроводности воды и льда. λ_g — зависящий от температуры и водности коэффициент теплопроводности почвы: в талой почве при $\log |\psi| < 3,1$ величина $\lambda_g = \lambda_g^m(q_w) = 418,68 \cdot \exp(-4,7 - \log |\psi|)$, а при $\log |\psi| \geq 3,1$ $\lambda_g = \lambda_g^m = 0,171548$.

Для мерзлой почвы $\lambda_g = \lambda_g^f = \lambda_g^m \left(\frac{W - W_l}{\rho_w} \right) \cdot (1 + W_l / \rho_l)$, где первая скобка после λ_g^m — функциональная.

Соотношение на скачке энтропии записывается аналогично (16):

$$dz_\tau / dt \cdot [S] = -[\Pi_s]. \quad (18)$$

$$\text{В почве } [S] = \frac{\rho_w \cdot L_{IW}}{T_o} \cdot [q_w]; [\Pi_s] = \left[\lambda_g \cdot \frac{\partial(\ln(T / T_o))}{\partial z} \right].$$

В водоеме или в смеси

$$[S] = \pm \frac{\rho_w \cdot L_{IW}}{T_o}; [\Pi_s] = \left[\lambda_g \cdot \frac{\partial(\ln(T / T_o))}{\partial z} \right] - \rho_w \cdot w \cdot [S].$$

Энтропия рвется на фронте, если на фронте есть скачок жидкой фазы воды (что выполнено, если это фронт при $T = T_o$ и если $W / \rho_w > q_w^m(T_o)$). На границе почвы и смеси или почвы и атмосферы поток энтропий непрерывен (как и в случае водности), а на границе атмосферы со смесью энтропия рвется, возможно, вместе со своим потоком.

Для определения водности и температуры почвы используется разностная аппроксимация интегральных аналогов уравнений (15) и (17) с помощью консервативной схемы. В отсутствии фронтов эта





схема переходит в обычную неявную трехточечную аппроксимацию первого порядка точности уравнений (15) и (17) на неравномерной сетке. Толщина дополнительного водного слоя на поверхности почвы меняется во времени (сам слой может возникать или исчезать), поэтому и интервалы интегрирования, включающие части этого слоя, переменны в течение шага по времени.

При аппроксимации интегралов по вертикали нужно знать, какую часть сеточного интервала занимает талая, а какую — мерзлая среда в начале и в конце шага по времени. При аппроксимации интегралов по времени от потоков воды и энтропии нужно знать, какую часть шага по времени середина сеточного интервала находится в талой, а какую — в мерзлой среде. Все четыре части определяются по начальному положению фронтов и (определяемым явной аппроксимацией (18)) начальным скоростям перемещений этих фронтов. Несколько сложнее рассмотрение потоков через среднюю линию дополнительного водного слоя на поверхности почвы, так как она сама может перемещаться из-за процессов фильтрации или из-за изменений толщины этого слоя при его взаимодействии с атмосферой. В конце шага по времени производится пересчет энтропии, обеспечивающий ее интегральное сохранение в нелинейной форме и стыковку предварительно полученных расположений фронтов с рассчитанными температурами.

Заключение

В заключение несколько слов о начальных данных, характеризующих состояние атмосферной и почвенной частей модели, и о задаваемых в течение всего срока прогноза в граничных точках (точки сетки на нижней границе почвы и на боковых и верхней границах атмосферной части модели) мезомодели краевых условиях.

В атмосферной части модели, кроме обычных для любой прогностической модели метеорологических величин температуры T , давления P , влажности q_v , составляющих скорости ветра u, v, w , нужны дополнительно поля водности облаков q_c и осадков q_r .

При построении этих полей привлекаются атмосферные статистики, а первым приближением для этих полей могут снова служить результаты фонового прогноза. В настоящее время для этой цели разрабатываются методики учета радиолокационных и спутниковых наблюдений.

Предполагается, что сеточное разрешение модели достаточно для прямого описания эволюции облаков и осадков при параметричес-





ком описании как скорости падения частиц осадков, так и микрофизических взаимодействий частиц облаков и осадков.

В почвенной части мезомодели задаются начальные поля температуры T , и объемного влагосодержания q_w . Кроме этого, необходимы начальные значения толщины и температуры водного, возможно, разнофазного покрова почвы (снег, лужи).

Краевые условия в атмосферной части модели нужны для всех вышеуказанных метеорологических полей. Они рассчитываются с помощью величин, полученных интерполяцией результатов фоновых прогноза в граничные и, возможно, приграничные точки пространственно-временной сетки мезомодели. На боковой границе почвенной части мезомодели ничего не задается, так как зависимость от горизонтальных координат считается параметрической. Проблема стока при этом решается предельно упрощенно: вводятся пороговые величины, как для объемного влагосодержания, так и для толщины слоя жидкой фазы воды на поверхности почвы. На нижней границе почвы на каждом шаге по времени задаются независящие от времени значения T и q_w .

Кроме вышеупомянутого, в точках сетки мезомодели должен быть задан ряд карт, таких как карты рельефа, растительного покрова, высоты уровня шероховатости, классификации почвы по типам и т.п.

Сведения о почвенных параметрах гораздо более скудны и могут приводить только к грубым оценкам распределений температуры и объемного водного содержания почвы. Пока что при оперативной деятельности здесь приходится ограничиваться интерполяцией между климатическими значениями на нижней границе почвенной области модели и реальными значениями температуры и влажности в атмосфере и температуры и фазового состава водного покрова поверхности. Результаты прогноза почвенных величин на срок построения начальных полей также могут использоваться в качестве первого приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В.А. Об одномерном случае задачи о рассеивающей и поглощающей среде конечной оптической толщины // Изв. АН Арм.ССР, 1944, № 1—2.
2. Buzbee B.L., Golub G.H., Nielsen C.W. On direct methods for solving Poisson's equations // SIAM J. Numer. Analysis, 1970, vol. 7. P. 627—655.
3. Кучмент Л.С. Модели процессов формирования речного стока Л.: Гидрометиздат, 1980. 144 с.

